

L'equazione della Banca d'Italia per il calcolo del Tasso (annuo) Effettivo Globale (TEG) – Considerazioni di tipo geometrico

Antonio Annibali ¹ - Alessandro Annibali ² - Carla Barracchini ³ – Francesco Olivieri ⁴

¹ Professore Ordinario fr di Matematica Finanziaria, Attuario - Facoltà di Economia, Università degli Studi 'La Sapienza' di Roma - email: antonio.annibali@uniroma1.it, antonio.annibali@gmail.com, antonio.annibali@legalmail.it

² Ingegnere finanziario senior developer –EDWH expert - email: alexannibali@openaccess.it - Sito: www.attuariale.eu

³ Professore Associato di Matematica Finanziaria, Dipartimento di Ingegneria industriale, di Informatica e di Economia, Università degli studi de L'Aquila - email: carla.barracchini@ec.univaq.it

⁴ Attuario professionista – Consulente Tecnico di ufficio presso il Tribunale di Roma - email: olivierifrancesco@alice.it

Agenda

La verifica del superamento del TSU, senza la preventiva determinazione del TEG

La non duplicazione dell'onere implicito relativo al differenziale tra regimi finanziari

La Direttiva 2014/17/UE del 4 febbraio 2014 del Parlamento Europeo (pubblicata nella Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea L60 a pag. 34 e segg.), in merito ai “contratti di credito ai consumatori ...”, presenta nell'Allegato I (pagg.71 e 72) le equazioni, di seguito riportate

ALLEGATO I

CALCOLO DEL TASSO ANNUO EFFETTIVO GLOBALE (TAEG)

I. Equazione di base che esprime l'equivalenza dei prelievi, da un lato, e dei rimborsi e delle spese, dall'altro.

L'equazione di base, da cui risulta il tasso annuo effettivo globale (TAEG), esprime su base annua l'equivalenza tra, da un lato, la somma dei valori attualizzati dei prelievi e, dall'altro, la somma dei valori attualizzati dei rimborsi e dei pagamenti delle spese, vale a dire:

$$\sum_{k=1}^m C_k (1+X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l (1+X)^{-s_l}$$

e) È possibile riscrivere l'equazione ricorrendo ad una sola sommatoria e utilizzando la nozione di flussi (A_k) che saranno positivi o negativi, ossia rispettivamente pagati o percepiti nei periodi da 1 a n, ed espressi in anni, vale a dire:

$$S = \sum_{k=1}^n A_k (1+X)^{-t_k},$$

dove S è il saldo dei flussi attualizzati e il cui valore sarà pari a zero se si desidera conservare l'equivalenza dei flussi.

Le **Istruzioni della Banca d'Italia** per la rilevazione dei “tassi effettivi globali medi ai sensi della legge sull’**usura**” del luglio 2016, presentano al punto C3 (b) – “**Calcolo del TEG**” (pag. 14) l’equazione per il calcolo del TEG, di seguito riportata

Istruzioni per la rilevazione dei tassi effettivi globali medi – luglio 2016

b) *Cat. 3, Cat. 4, Cat. 6, Cat. 7, Cat. 8, Cat. 9b, Cat. 10 e operazioni rientranti nelle categorie di cui al punto a) che prevedono il rimborso del prestito con un piano di rientro predefinito.*

In analogia a quanto previsto dal Provvedimento della Banca d'Italia del 15.7.2015 per il calcolo del TAEG ⁽²⁵⁾, la formula per il calcolo del TEG è la seguente:

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+i)^{t'_{k'}}$$

con le specifiche sottoelencate

dove:

i è il TEG annuo, che può essere calcolato quando gli altri termini dell’equazione sono noti nel contratto o altrimenti;

k è il numero d’ordine di un “prestito”;

k' è il numero d’ordine di una “rata di rimborso”;

A_k è l’importo del “prestito” numero **K**;

A'_{k'} è l’importo della “rata di rimborso” numero **K'**;

m è il numero d’ordine dell’ultimo “prestito”;

m' è il numero d’ordine dell’ultima “rata di rimborso”;

t_k è l’intervallo espresso in anni e frazioni di anno tra la data del “prestito” n.1 e le date degli ulteriori “prestiti” da 2 a **m**;

t'_{k'} è l’intervallo espresso in anni e frazioni di anni tra la data del “prestito” n.1 e le date delle “rate di rimborso” da 1 a **m'**.

Per “rata di rimborso” si intende ogni pagamento a carico del cliente relativo al rimborso del capitale, degli interessi e degli oneri inclusi di cui al punto C4.

Per “prestito” si intende ciascuna erogazione eseguita dal creditore per effetto di uno stesso contratto.

Confrontando le due equazioni presenti nella Direttiva Comunitaria e nelle Istruzioni della Banca d'Italia, è possibile effettuare un’analisi tecnica di “**coerenza**” riguardo ai fondamenti dell’**Algebra** e della **Matematica Finanziaria**. Con particolare riferimento alla trasposizione effettuata dalla Banca d'Italia, si possono evidenziare gravi errori algebrici, tali da rendere la formula stessa operativamente inapplicabile. Per superare tale problematica è necessario introdurre alcune proposte di “**bonifica**” dell’equazione nostrana, tenendo in ovvio conto la mancata considerazione delle ipotesi di esistenza e di unicità delle soluzioni

$$\sum_{k=1}^m C_k (1 + X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l (1 + X)^{-s_l}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+i)^{t'_{k'}}$$

Come si può notare, le due equazioni hanno una struttura del tutto analoga, salvo la modifica, **prettamente inutile**, di simbolismo, effettuata dalla Banca d'Italia:

$$X \rightarrow i \quad , \quad l \rightarrow k' \quad , \quad C_k \rightarrow A_k \quad , \quad D_l \rightarrow A'_{k'} \quad , \quad S_l \rightarrow t_{k'}$$

In merito agli aspetti comuni alle due formule, si riportano le seguenti osservazioni:

- 1) il presupposto di effettuazione dei calcoli, effettuati secondo le leggi del regime finanziario della capitalizzazione composta, risulta non dichiarato,
- 2) la forma delle equazioni, strutturata in due sommatorie distinte, non permette di evidenziare il segno algebrico dei **saldi progressivi**, con la conseguenza dell'implicito utilizzo del tasso incognito anche nell'ipotesi di saldi a credito di colui che ha ottenuto gli **m** prestiti e che effettua gli **m'** rimborsi. **Nota:** si ricorda che il tasso per i saldi a credito è fissato, mentre quello, oggetto di ricerca, è il tasso per i saldi a debito, ossia di costo per il cliente (ovvero un **Tasso Interno di Costo - TIC**): è stata questa probabilmente la preoccupazione, che ha fatto decidere all'estensore comunitario di aggiungere alla prima equazione anche la seconda, in forma di un'unica sommatoria, da uguagliare a zero, con l'ovvia attribuzione dei segni ai flussi componenti

$$S = \sum_{k=1}^n A_k (1 + X)^{-t_k} ,$$

- 3) le variabili indicate all'esponente dei fattori di attualizzazione ($t_k, S_l, t_{k'}$) non rappresentano intervalli (come indicato nelle note esplicative, sia del documento comunitario, che di quello nostrano), ma più esattamente **ampiezze di intervalli** (si ricorda che un intervallo, letto sull'asse dei tempi, corrisponde ad un segmento, la cui lunghezza corrisponde all'ampiezza, ossia alla misura, dell'intervallo temporale). Si tratta di un errore del tutto simile a quello in cui incorre chi confonde la superficie di una figura piana con l'area oppure un solido con il volume (che sono ovviamente le loro misure): desta meraviglia che tale errore concettuale sia presente in simili contesti,
- 4) la differenziazione di simbolismo tra i due **indici muti** (cioè strumentali), che descrivono l'insieme di variabilità delle componenti delle due sommatorie (rispettivamente **k** e **l**, **k** e **k'**) è del tutto inutile, poiché si tratta di due sommatorie indipendenti e non già di una sommatoria doppia. Si tratta di un errore di **"insicurezza algebrica"** (tipica di chi mette parentesi inutili per maggior sicurezza di non sbagliare), che porta a non usare una lettera per indicare una variabile, se già utilizzata in formule precedenti, indipendenti da quella attuale. In questo contesto, il problema non è grave: il peccato specifico è veniale, ma questa insicurezza potrebbe nascondere insicurezze più gravi,
- 5) con riguardo all'equazione della Banca d'Italia, risulta algebricamente grave l'errore presente nell'indicazione delle ampiezze degli intervalli presenti al secondo membro della formula. Le ampiezze degli intervalli presenti nella sommatoria di sinistra sono t_k ($k=1,2,\dots,m$) ossia t_1, t_2, \dots, t_m (come, d'altro canto, nella formula comunitaria), ma, per contro, le ampiezze degli intervalli riportate nella sommatoria di destra sono $t_{k'}$ ($k'=1,2,\dots,m'$) ossia

t_1, t_2, \dots, t_m , ripresentando le stesse ampiezze della sommatoria di sinistra, anche se con numerosità diversa. L'estensore italiano della formula, ha ritenuto di caratterizzare un diverso insieme di ampiezze di intervalli, cambiando, non già gli elementi del vettore, ma gli indici, i quali, essendo variabili mute, servono soltanto a descrivere il susseguirsi dei diversi elementi dell'insieme e non a caratterizzarne gli elementi. E' evidente che le ampiezze degli intervalli della sommatoria di destra, ricordando il concetto di variabile muta, andavano semplicemente indicate con t'_k ($k=1,2,\dots,m'$) ossia t'_1, t'_2, \dots, t'_m . Come già detto, questo errore è da considerare grave, in quanto inficia la validità della formula e la rende inapplicabile. Va notato che detto errore non è presente nell'analoga formula della Direttiva Comunitaria. La non conoscenza dell'algebra da parte del nostro principale Istituto di credito comporta conseguenze preoccupanti.

- 6) per quel che si riferisce, infine, a un fondamentale aspetto algebrico e finanziario, risulta che, di fronte al problema della ricerca della soluzione delle equazioni considerate, in entrambe le equazioni non viene fatto alcun riferimento teorico alle condizioni di esistenza e di unicità del tasso-soluzione, né tanto meno ai metodi numerici necessari per la sua ricerca. Le equazioni proposte, tenendo conto della indicata possibilità di molteplicità (e indipendenza temporale e quantitativa) dei prestiti e dei rimborsi, presenteranno uno e un solo tasso-soluzione, solo se risulta verificata la condizione di esistenza, ad esempio del **"teorema del punto fisso"** di **Brouwer** (Luitzen Brouwer - matematico olandese 1881-1966) e la condizione di unicità, ad esempio del **"teorema delle contrazioni"** di **Banach-Caccioppoli** (Stefan Banach - matematico polacco 1892-1945 e Renato Caccioppoli - matematico italiano 1904-1959). Solo in tale situazione, si può dar corso alla ricerca dell'**unica soluzione**, tramite un metodo di tipo numerico iterativo/ricorsivo, quale, ad esempio, il metodo delle tangenti di **Newton-Raphson**.

Con riguardo alle diverse tipologie di investimento e alle condizioni di esistenza e di unicità del tasso interno, si possono finanziariamente distinguere differenti tipi di investimento:

- **investimento semplice**, se l'operazione finanziaria è caratterizzata da un solo prestito ed $(n-1)$ successivi rimborsi,
- **investimento in senso stretto**, se l'operazione finanziaria è caratterizzata da m prestiti che precedono i successivi $(n-m)$ rimborsi; un investimento semplice è un caso particolare di investimento in senso stretto (corrispondente al caso $m=1$),
- **investimento puro secondo Norstrom** (Carl J. Norstrom - matematico norvegese del XX secolo), se l'operazione finanziaria è caratterizzata da un vettore dei flussi cumulati (saldi) progressivi, dapprima negativi e successivamente positivi o nulli; un investimento in senso stretto è un caso particolare di investimento secondo Norstrom,
- **investimento puro secondo Soper** (Charles Samuel Soper - matematico australiano del XX secolo), se l'operazione finanziaria, valutata a un fissato tasso, è caratterizzata da un vettore di $(n-1)$ saldi progressivi negativi (o nulli) e dal saldo finale nullo; il criterio di Soper risulta meno restrittivo di quello di Norstrom, nel senso che il criterio di Soper può garantire l'esistenza, l'unicità e la positività del tasso interno, anche in casi in cui il criterio di Norstrom non fornisca tale garanzia.

Va considerato che la non verifica di detti ultimi due criteri “di sufficienza”, non esclude l’esistenza di un tasso positivo (ricavabile con i citati metodi numerici), ma non ne assicura l’unicità: ad esempio, allorquando la funzione dell’ambiente EXCEL **TIR.COST(val;[ipotesi])** restituisce un tasso positivo (finanziariamente accettabile), tale risultato prescinde dalla verifica delle condizioni teoriche di unicità di tale tasso. In tale situazione, è d’aiuto lo studio empirico dell’andamento del grafico della funzione **Valore Attuale Netto (VAN)**, al variare del tasso di attualizzazione. Come verrà mostrato in seguito, lo studio di tale funzione renderà palese come la considerazione, nell’equazione relativa al calcolo del TEG, dell’onere implicito relativo al differenziale tra i regimi finanziari della capitalizzazione composta e della capitalizzazione semplice non costituisca assolutamente una duplicazione di tipo algebrico, né tanto meno di tipo finanziario.

Come anticipato, gli effetti dell’idiosincrasia della Banca d’Italia nei confronti dell’algebra elementare possono essere sanati attraverso una “**bonifica**” dell’equazione proposta dalla Banca stessa e delle relative specifiche

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{m'} \frac{A'_k}{(1+i)^{t'_k}}$$

i è il TEG annuo,

k è il numero d’ordine di un “prestito” o di una “rata di rimborso”,

A_k è l’importo del “prestito” numero k ,

A'_k è l’importo della “rata di rimborso” numero k ,

m è il numero d’ordine dell’ultimo “prestito”,

m' è il numero d’ordine dell’ultima “rata di rimborso”,

t_k è l’ampiezza dell’intervallo espresso in anni tra la data del “prestito” numero 1 e le date dei “prestiti” da 2 a m ,

t'_k è l’ampiezza dell’intervallo espresso in anni tra la data del “prestito” numero 1 e le date delle “rate di rimborso” da 1 a m' ,

prestito = ciascuna erogazione eseguita dal creditore a favore del cliente,

rata di rimborso = ogni pagamento a carico del cliente a favore del creditore.

Partendo quindi dalla precedente formula “**bonificata**” della Banca d’Italia, è palese come le espressioni presenti nei due membri della relazione proposta siano due **VAN**, rispettivamente il valore attuale dei prestiti A_k e il valore attuale delle rate di rimborso A'_k , entrambi calcolati in base allo stesso tasso: la condizione di uguaglianza tra le due espressioni genera un’equazione, la cui incognita **tasso i** rappresenta, nell’ipotesi (valida anche nelle considerazioni a seguire) della verifica delle condizioni di esistenza e unicità, il **T(A)EG** cercato.

È altrettanto palese, a chi sa di matematica finanziaria, che

- la funzione **VAN** è una funzione monotona decrescente (oppure non crescente) al crescere del tasso di attualizzazione (in particolare per valori positivi del tasso),
- nel caso particolare in cui l’operazione finanziaria risulti caratterizzata da un solo prestito, posizionato al tempo iniziale, il **VAN** “dei prestiti” ha come rappresentazione grafica un segmento orizzontale,

- geometricamente, alla risoluzione algebrica dell'equazione proposta, corrisponde la ricerca dell'ascissa dell'unico punto di incontro dei due grafici rappresentanti i due VAN,
- il valore della soluzione dell'equazione dipende dalla presenza/assenza delle poste che vengono considerate nei prestiti e nelle rate di rimborso: ciò permette di evidenziare l'apporto di ciascun addendo, con particolare riguardo all'onere implicito per il differenziale di regime finanziario e l'assenza della sua duplicazione (**duplicazione**, che, al contrario, taluni soggetti, **erroneamente** ipotizzano e di cui si darà evidenza algebrica, numerica e grafica della sua **assenza** nel prosieguo).
- la formula della Banca d'Italia presenta come incognita un tasso annuo, ma può essere applicata anche con riferimento ad un tasso periodale **T(P)EG**, salvo poi calcolarne l'equivalente tasso annuo **T(A)EG**, in base alle relazioni di **equivalenza tra tassi effettivi** nel regime finanziario della capitalizzazione composta.

Con riguardo a un'operazione di leasing ("mutatis mutandis" la trattazione è riferibile a una operazione di mutuo), la formula bonificata della Banca d'Italia può essere particolarizzata, facendo riferimento alle seguenti variabili:

D_0	Importo finanziato lordo	€ 4.260.000
W_0	Maxi-canone iniziale (20%)	€ 852.000
$D_0 - W_0$	Importo finanziato (netto) (80%)	€ 3.408.000
S_0	Spese e oneri iniziali (istruttoria + perizia + spese)	€ 57.000
m	Frazionamento (mensile) del pagamento delle rate	12
n	Durata ammortamento (canoni mensili + riscatto)	204
$n - 1$	Durata ammortamento (canoni mensili)	203
G_n	Riscatto finale al tempo finale (10%)	€ 426.000
$S_k = S$	Spese periodiche (assicurazione + incasso) ($k=1,2,\dots,204$)	€ 320
i	Tasso leasing (TAE: tasso annuo effettivo)	8,084981%

Metodologia di ammortamento: "**alla francese**"

Regime finanziario: capitalizzazione composta

$R_k = R$ **Canone mensile (costante) ($k=1,2,\dots, 203$)**

Nota metodologica: la definizione di **tasso leasing** della Banca d'Italia, riportata in tutti i contratti di leasing, è la seguente: "**tasso interno di attualizzazione** per il quale si verifica l'uguaglianza fra il costo di acquisto del bene locato (al netto delle imposte) e il valore attuale dei canoni e del prezzo dell'opzione finale di acquisto (al netto delle imposte) contrattualmente previsti". Con riferimento a una data operazione finanziaria "si definisce **TIR** oppure **TIC** (tasso interno di rendimento oppure costo) quel tasso (effettivo annuo), tale che il **REA** (risultato economico attualizzato), ossia il **VAN** (valore attuale netto), della distribuzione dei costi e dei ricavi dell'operazione risulti nullo" (cfr. **Mario Trovato - Matematica Finanziaria - Etas Libri - pag. 488**). La caratteristica di **tasso effettivo** del tasso leasing è ribadita da **Maria Caliri - Appunti di Matematica Finanziaria - Giappichelli - pag. 252: 3.2 - Criterio del tasso interno - "Si è detto che tale criterio fa riferimento al tasso effettivo dell'operazione e che è stato calcolato uguagliando le prestazioni attualizzate del debitore e del creditore, ciò che equivale ad uguagliare a zero il valore attuale dell'operazione".** Se il regime finanziario è quello della capitalizzazione composta, il **Tasso leasing** non coincide con il **Tasso Annuo Nominale (TAN)**,

salvo nel caso di convertibilità annuale; al contrario, se il piano di ammortamento di leasing è redatto nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, non ci sarebbe differenza tra tasso leasing (TAE) e il TAN. Se il regime finanziario è quello della capitalizzazione composta, qualora nel contratto di leasing fosse contenuta la locuzione “**tasso leasing indicato come TAN**”, senza alcuna altra specifica, dal tasso indicato non risulterebbe possibile ricavare il **tasso leasing (TAE)**, per la mancanza dell’indicazione della convertibilità del TAN (essendo ingiustificata l’adozione, come convertibilità del TAN, del frazionamento delle rate), essendo la detta convertibilità un concetto primitivo, relativo alla definizione di tasso nominale, che, in quanto tale, precede la trattazione di una qualsiasi operazione finanziaria. In tale ipotesi, l’indicazione del tasso leasing tramite il TAN, senza indicazione della convertibilità, sarebbe plausibile solo nel caso di adozione del regime della capitalizzazione semplice (ovviamente, con il vincolo finanziario di fissazione di un’unica epoca di equivalenza, che, in relazione alla natura dell’operazione di mutuo e alle caratteristiche del regime finanziario adottato, dovrebbe essere quella finale).

Per quanto detto, posto che il tasso, indicato in un contratto di leasing, tradizionalmente proposto dall’istituto bancario per essere applicato secondo il regime finanziario della capitalizzazione composta, deve essere quello annuo effettivo, il tasso periodale effettivo si può ricavare tramite la coerente formula di equivalenza tra tassi effettivi (annuo e periodale) in capitalizzazione composta

$$i_{1/m} = (1 + i)^{1/m} - 1 = 1,08084981^{1/12} - 1 = 0,65\%$$

a cui equivale un **tasso annuo nominale**, con convertibilità mensile

$$j_m = m \cdot i_{1/m} = 12 \cdot 0,65\% = 7,80\%$$

Condizione di chiusura (iniziale) dell’operazione finanziaria di leasing

$$D_0 - W_0 = R \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{r_{k|i_{1/m}}} + \frac{G_n}{r_{n|i_{1/m}}} = R \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}} + G_n \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}}$$

Canone mensile (“alla francese”, regime finanziario della capitalizzazione composta)

$$R = \frac{D_0 - W_0 - G_n \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}}}{a_{\overline{n-1}|i_{1/m}}} = \frac{3.408.000 - \overbrace{426.000 \cdot 0,266679}^{113.605,31}}{112,551915} = 29.270,00$$

Quote interessi mensili (k=1,2,...,204)

$$I_k = D_{k-1} \cdot i_{1/m}$$

Quote capitale mensili (k=1,2,...,203)

$$C_k = R - I_k \quad , \quad C_n = G_n - I_n$$

Debiti residui mensili (k=1,2,...,203)

$$D_k = D_{k-1} - C_k = D_{k-1} \cdot (1 + i_{1/m}) - R \quad , \quad D_n = D_{n-1} \cdot (1 + i_{1/m}) - G_n$$

Piano di ammortamento (alla francese, regime finanziario: capitalizzazione composta - CC)

<i>N</i>	<i>Rata cc</i>	<i>Int cc</i>	<i>Cap cc</i>	<i>Deb</i>
0				3,408,000.00
1	29,270.00	22,152.00	7,118.00	3,400,882.00
2	29,270.00	22,105.73	7,164.27	3,393,717.73
3	29,270.00	22,059.17	7,210.84	3,386,506.89
4	29,270.00	22,012.29	7,257.71	3,379,249.19
5	29,270.00	21,965.12	7,304.88	3,371,944.31
...
199	29,270.00	3,596.43	25,673.57	527,622.84
200	29,270.00	3,429.55	25,840.45	501,782.39
201	29,270.00	3,261.59	26,008.42	475,773.98
202	29,270.00	3,092.53	26,177.47	449,596.51
203	29,270.00	2,922.38	26,347.62	423,248.88
204	426,000.00	2,751.12	423,248.88	0.00

L'usufrutto relativo al processo di ammortamento in **CC** sopra descritto risulta

$$U_0 = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{r_{k|i_{1/m}}} = i_{1/m} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{D_{k-1}}{r_{k|i_{1/m}}} = 1.859.505,68$$

Ripetendo i calcoli, adottando il regime finanziario della **capitalizzazione semplice** con epoca di **equivalenza finale**, risulta:

Condizione di chiusura (finale) dell'operazione finanziaria di **leasing**

$$(D_0 - W_0) \cdot r_{n|i_{1/m}}^{csf} = R^{csf} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} r_{n-k|i_{1/m}}^{csf} + G_n = R^{csf} \cdot \left(s_{n|i_{1/m}}^{csf} - 1 \right) + G_n$$

Canone mensile ("alla francese", regime finanziario della capitalizzazione semplice)

$$R^{csf} = \frac{(D_0 - W_0) \cdot r_{n|i_{1/m}}^{csf} - G_n}{s_{n|i_{1/m}}^{csf} - 1} = \frac{7.927.008,00}{337,589} = 22.219,35$$

Quote interessi mensili ($k=1,2,\dots,204$)

$$I_k^{csf} = \frac{D_{k-1}^{csf} \cdot i_{1/m}}{r_{n-k|i_{1/m}}^{csf}}$$

Quote capitale mensili ($k=1,2,\dots,203$)

$$C_k^{csf} = R^{csf} - I_k^{csf} \quad , \quad C_n = G_n - I_n$$

Debiti residui mensili ($k=1,2,\dots,203$)

$$D_k^{csf} = D_{k-1}^{csf} - C_k^{csf} = D_{k-1}^{csf} \cdot \left(1 + \frac{i_{1/m}}{r_{n-k|i_{1/m}}^{csf}} \right) - R^{csf} \quad , \quad D_n^{csf} = D_{n-1}^{csf} \cdot (1 + i_{1/m}) - G_n$$

Piano di ammortamento (alla francese, regime finanziario: capitalizzazione semplice composta con epoca di equivalenza finale - CSf)

N	Rata csf	Int csf	Cap csf	Deb
0				3,408,000.00
1	22,219.35	9,550.33	12,669.02	3,395,330.98
2	22,219.35	9,541.57	12,677.78	3,382,653.20
3	22,219.35	9,532.73	12,686.62	3,369,966.59
4	22,219.35	9,523.82	12,695.53	3,357,271.06
5	22,219.35	9,514.83	12,704.52	3,344,566.54
...
199	22,219.35	3,267.45	18,951.90	500,069.40
200	22,219.35	3,168.08	19,051.27	481,018.13
201	22,219.35	3,066.81	19,152.53	461,865.60
202	22,219.35	2,963.60	19,255.75	442,609.85
203	22,219.35	2,858.38	19,360.97	423,248.88
204	426,000.00	2,751.12	423,248.88	0.00

L'usufrutto relativo al processo di ammortamento in **CSf** sopra descritto, valutato secondo il regime finanziario **CC**, in coerenza con il regime finanziario adottato per la costruzione dell'equazione proposta dalla Banca d'Italia, risulta

$$U_0^{csf|cc} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k^{csf}}{r_{k|i_{1/m}}} = i_{1/m} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{D_{k-1}^{csf}}{r_{n-k|i_{1/m}}^{csf} \cdot r_{k|i_{1/m}}} = 913.594,29$$

La differenza tra i due valori relativi all'usufrutto $U_0 - U_0^{csf|cc}$ costituisce il cosiddetto **onere implicito "ab origine"** relativo al differenziale tra i regimi finanziari della capitalizzazione composta e della capitalizzazione semplice (si ribadisce che entrambi gli usufrutti sono stati calcolati secondo il regime della capitalizzazione composta, in coerenza con il regime adottato per la costruzione dell'equazione proposta dalla Banca d'Italia)

$$O_0^{cc\#csf} = U_0 - U_0^{csf|cc} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k - I_k^{csf}}{r_{k|i_{1/m}}} = 1.859.505,68 - 913.594,29 = 945.911,39$$

Nel caso all'esame, l'espressione del **VAN "dei prestiti"** della formula della Banca d'Italia (indicato con l'indice in alto a destra: 1) è caratterizzato da un solo prestito (al tempo iniziale) e quindi la sua rappresentazione grafica corrisponde ad un segmento orizzontale, la cui ordinata costante dipende dalle poste considerate. In tal senso, è possibile considerare i seguenti casi:

Importo finanziato - grafico: VAN(TAE)

$$VAN_a^1(i_{1/m}^\#) = D_0 - W_0 = 3.408.000,00$$

Importo finanziato al netto delle spese iniziali - grafico: VAN(TAE_spese)

$$VAN_b^1(i_{1/m}^{\#}) = D_0 - W_0 - S_0 = \frac{3.351.000,00}{3.408.000,00 - 57.000,00}$$

Importo finanziato al netto delle spese iniziali e dell'onere implicito - grafico: VAN(TEG)

$$VAN_c^1(i_{1/m}^{\#}) = D_0 - W_0 - S_0 - O_0^{cc\#csf} = \frac{2.405.088,61}{3.351.000,00 - 945.911,39}$$

Nota: il tasso $i_{1/m}^{\#}$ rappresenta il tasso periodale effettivo variabile, a cui equivale il tasso annuo effettivo variabile $i^{\#}$, ottenuto dalla relazione di equivalenza finanziaria tra tassi effettivi

$$i^{\#} = (1 + i_{1/m}^{\#})^m - 1$$

con il quale sarà caratterizzata la scala dei tassi sull'asse delle ascisse del grafico che sarà di seguito illustrato.

Sempre nel caso all'esame, l'espressione del VAN "delle rate" della formula della Banca d'Italia (indicato con l'indice in alto a destra: 2) è caratterizzato da un insieme di pagamenti e, quindi, la sua rappresentazione grafica corrisponde ad una curva decrescente al crescere del tasso di interesse, le cui ordinate dipendono dal variabilità del tasso e dalle poste considerate. In tal senso, è possibile considerare i seguenti casi:

Valore attuale delle rate e del riscatto finale - grafico: VAN_a

$$\begin{aligned} VAN_a^2(i_{1/m}^{\#}) &= R \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{\#}} + G_n \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{\#}} = \\ &= 29.270,00 \cdot a_{\overline{203}|i_{1/m}^{\#}} + 426.000,00 \cdot v_{\overline{204}|i_{1/m}^{\#}} \end{aligned}$$

Valore attuale delle rate, delle spese e del riscatto finale - grafico: VAN_b

$$\begin{aligned} VAN_b^2(i_{1/m}^{\#}) &= (R + S) \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{\#}} + (G_n + S) \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{\#}} = \\ &= 29.590,00 \cdot a_{\overline{203}|i_{1/m}^{\#}} + 426.320,00 \cdot v_{\overline{204}|i_{1/m}^{\#}} \end{aligned}$$

Nota grafica: poiché i grafici delle due curve, rappresentanti le due funzioni VAN_a e VAN_b, sono visivamente indistinguibili, nel grafico sottostante il loro pressoché comune andamento sarà indicato semplicemente VAN.

Uguagliando in modo coerente i VAN "dei prestiti" con i VAN "delle rate" è possibile costruire le diverse equazioni (tipologia: Banca d'Italia "bonificata"), le cui soluzioni rappresentano i diversi TEG relativi alla considerazione (o meno) delle differenti spese ed oneri:

Equazione (1) in assenza di spese iniziali/periodiche e onere implicito "ab origine"

$$VAN_a^1(i_{1/m}^{\#1}) = VAN_a^2(i_{1/m}^{\#1}) \Rightarrow D_0 - W_0 = R \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{\#1}} + G_n \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{\#1}}$$

$$3.408.000,00 = 29.270,00 \cdot a_{\overline{203}|i_{1/m}^{\#1}} + 426.000,00 \cdot v_{\overline{204}|i_{1/m}^{\#1}}$$

Equazione (2) in presenza di spese iniziali/periodiche, in assenza di onere implicito "ab origine"

$$VAN_b^1(i_{1/m}^{\#2}) = VAN_b^2(i_{1/m}^{\#2}) \Rightarrow D_0 - W_0 - S_0 = (R + S) \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{\#2}} + (G_n + S) \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{\#2}}$$

$$3.351.000,00 = 29.590,00 \cdot a_{\overline{203}|i_{1/m}^{\#2}} + 426.320,00 \cdot v_{\overline{204}|i_{1/m}^{\#2}}$$

Equazione (3) in presenza di spese iniziali/periodiche e di onere implicito "ab origine"

$$VAN_c^1(i_{1/m}^{\#3}) = VAN_b^2(i_{1/m}^{\#3}) \Rightarrow D_0 - W_0 - S_0 - O_0^{cc\#csf} =$$

$$= (R + S) \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{\#3}} + (G_n + S) \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{\#3}}$$

$$2.405.088,61 = 29.590,00 \cdot a_{\overline{203}|i_{1/m}^{\#3}} + 426.320,00 \cdot v_{\overline{204}|i_{1/m}^{\#3}}$$

Dalle soluzioni delle rispettive equazioni, espresse in termini di tassi periodali effettivi, è possibile calcolare gli equivalenti tassi annui effettivi, ossia i **TEG annui**, conseguenti alla considerazione delle diverse spese ed oneri:

Equazione (1) in assenza di spese iniziali/periodiche e onere implicito "ab origine"

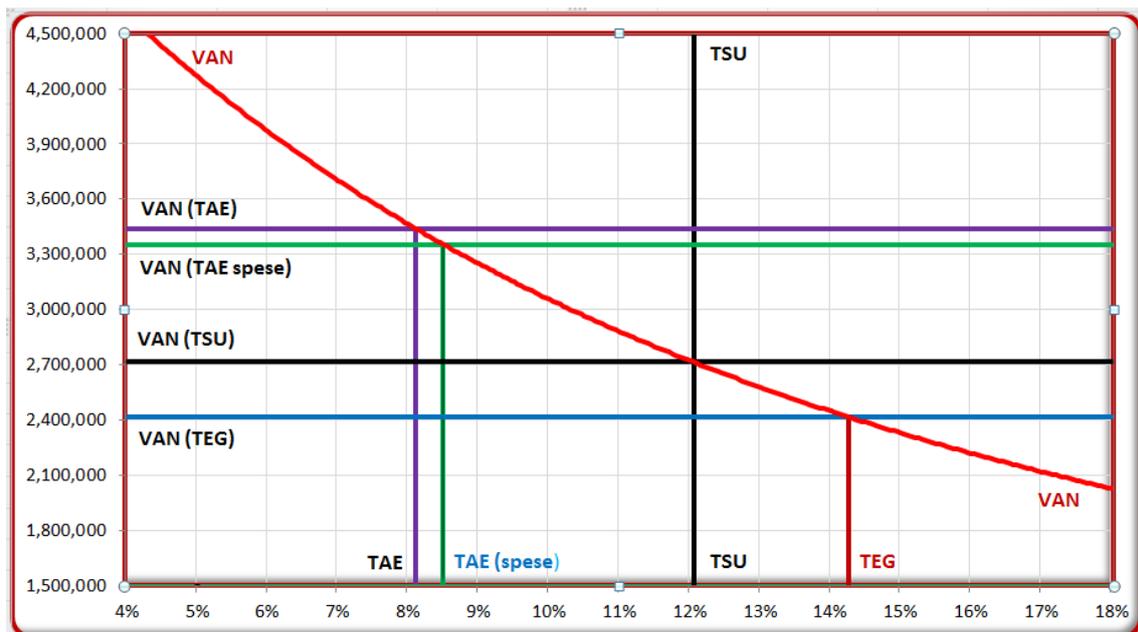
$$i_{1/m}^{\#1} = 0,650000\% \Rightarrow i^{\#1} = (1 + i_{1/m}^{\#1})^m - 1 = 8,084981\% \text{ coincidente con il TAE}$$

Equazione (2) in presenza di spese iniziali/periodiche, in assenza di onere implicito "ab origine"

$$i_{1/m}^{\#2} = 0,682892\% \Rightarrow i^{\#2} = (1 + i_{1/m}^{\#2})^m - 1 = 8,509602\% \text{ indicato TAE(spese)}$$

Equazione (3) in presenza di spese iniziali/periodiche e di onere implicito "ab origine"

$$i_{1/m}^{\#3} = 1,123283\% \Rightarrow i^{\#3} = (1 + i_{1/m}^{\#3})^m - 1 = 14,344140\% \text{ indicato TEG}$$



Nel grafico è evidenziato il **Tasso (annuo effettivo) Soglia d'Usura (T(AE)SU)** pari al **12,05%**:

Dall'esame globale del grafico risulta che:

- la curva, indicata come **VAN**, rappresenta il valore attuale netto, al variare del tasso di attualizzazione, dei canoni, delle spese periodiche e del riscatto finale; la funzione, rappresentata dalla curva, corrisponde al secondo membro della equazione della Banca d'Italia e risulta decrescente, al crescere del tasso d'interesse, trattandosi di un valore attuale di una rendita;
- i segmenti orizzontali, indicati come **VAN(TAE)**, **VAN (TAE_spese)**, **VAN(TSU)** e **VAN(TEG)**, rappresentano i valori corrispondenti al primo membro dell'equazione della Banca d'Italia, come indicati nelle rispettive equazioni;
- le ascisse dei punti di intersezione della curva VAN con i diversi segmenti orizzontali rappresentano i tassi-soluzione (TEG) delle equazioni indicate al punto precedente: la stretta monotonia della funzione VAN assicura l'unicità delle rispettive soluzioni;
- come era plausibile, l'equazione (1) presenta, come unica soluzione TEG, il TAE (Tasso leasing) dell'operazione finanziaria: essa, infatti, si basa sulla relazione secondo la quale sono stati calcolati i canoni. Il risultato ottenuto mostra l'**inconsistenza della congettura** ("**duplicazione dell'onere implicito relativo al differenziale di regime finanziario**"), avanzata da taluni soggetti, secondo i quali la formula, proposta dalla Banca d'Italia per la determinazione del TEG, terrebbe già conto di tale "**costo implicito**", a causa dell'utilizzo del regime finanziario della capitalizzazione composta utilizzato per strutturare l'equazione.

L'errata presunzione di tale duplicazione, secondo cui la formula proposta dalla Banca d'Italia fornirebbe autonomamente (senza quindi la necessità di calcolare separatamente l'onere implicito) una misura del costo relativo al differenziale di regime (CC#CS), lascia sconcertati per il fatto che tale formula non ha in sé alcun elemento che caratterizzi la presenza del regime finanziario della capitalizzazione semplice e, quindi, non si comprende come essa possa fornire una misura dell'effetto differenziale tra i due regimi. Considerato che la formula B.I. è integralmente costruita in capitalizzazione composta, solo la considerazione dell'onere implicito, calcolato separatamente, può consentire l'introduzione nel calcolo del TEG dell'effetto del differenziale tra regimi (CC#CS).

Quanto precedentemente affermato risulta palese dall'esame del precedente grafico, nel quale è evidente come la coincidenza tra il valore attuale dei canoni e del riscatto (calcolato secondo il regime finanziario della capitalizzazione composta) e l'importo finanziato, comporti un **TEG pari al TAE (tasso leasing)** dell'operazione finanziaria, senza alcuna evidenza dell'aggravio rappresentato dall'onere implicito. Quanto ottenuto algebricamente e geometricamente ribadisce come la definizione di **tasso leasing** della Banca d'Italia, riportata in precedenza e qui ripetuta, presente in tutti i contratti di leasing: "**tasso interno di attualizzazione** per il quale si verifica l'uguaglianza fra il costo di acquisto del bene locato (al netto delle imposte) e il valore attuale dei canoni e del prezzo dell'opzione finale di acquisto (al netto delle imposte) contrattualmente previsti", si riferisca, senza dubbio alcuno, al **TAE (tasso annuo effettivo)** e non certo al **TAN (tasso annuo nominale)**, quest'ultimo, come è noto, a chi conosce la Matematica Finanziaria, è una tipologia di tasso d'interesse semplicemente strumentale, che necessita di essere accompagnato dalla sua convertibilità.

Da ultimo, va considerato che, a fronte di un processo dimostrativo effettuato per la giustezza e il calcolo dell'onere implicito, nessuna dimostrazione è stata effettuata per verificare l'asserita duplicazione, essendosi i sostenitori della duplicazione limitati a esternare pure dichiarazioni, prive di supporto dimostrativo: si rammenta che, trattandosi di un problema scientifico, specificatamente matematico, lo strumento di **verifica di una congettura** è la **dimostrazione**. A riprova di ciò, si riportano alcune affermazioni estratte dalle seguenti sentenze:

- **Tribunale Civile di Roma** (num. 364/gennaio_2022): "Infine, il maggior onere a titolo di interessi riconducibile ad un piano di ammortamento (alla francese) redatto applicando il regime finanziario della capitalizzazione composta, pone il problema del computo di tale "costo" nel calcolo del tasso effettivo globale annuo (TEG), da confrontare con il tasso soglia usurario (TSU) introdotto dalla L. n. 108 del 2008, ai fini della verifica dell'usurarietà dei tassi pattuiti. Difatti - come innanzi detto - ai sensi dell'art. 644, IV co., c.p., come modificato dall'art. 2 della L. n. 108/1006 "per la determinazione del tasso di interesse usurario si tiene conto delle commissioni, remunerazioni a qualsiasi titolo e delle spese, escluse quelle per imposte e tasse, collegate alla erogazione del credito. Alla stregua di una corretta interpretazione di tale norma, tra i costi, le commissioni e le spese direttamente collegate all'erogazione del finanziamento, va tenuto conto anche del "costo" a carico del mutuatario, insito nell'utilizzo del regime di capitalizzazione composta nella redazione del piano di ammortamento (alla francese); costo pari al differenziale determinato dal minor importo della rata risultante dall'applicazione del regime di capitalizzazione semplice. Questo a prescindere dall'accettazione, esplicita o implicita, del regime di capitalizzazione composta degli interessi da parte del mutuatario, posto comunque a conoscenza dell'ammontare complessivo delle rate da pagare per il rimborso graduale del finanziamento. Difatti, anche in caso di accettazione, da parte del mutuatario, del regime finanziario di capitalizzazione composta, tale "costo implicito" va comunque computato ai fini del calcolo del tasso effettivo globale annuo (TEG), al pari di tutti gli altri costi, spese e remunerazioni collegate al finanziamento, incluso il vero e proprio effetto anatocistico di cui all'art. 1283 c.c. Al riguardo, tuttavia, va evidenziato in maniera dirimente il fatto che la formula matematica prevista dalle Istruzioni della B.I. per la determinazione del TEG tiene già conto del c.d. "**costo implicito**" insito nell'utilizzo del regime finanziario della capitalizzazione composta; ragione per cui non è possibile rideterminarlo e **applicarlo una seconda volta**, al fine di calcolare il TEG da confrontare con il tasso soglia antiusura (TSU).",
- **Tribunale Civile di Roma** (num. 3767/marzo_2022): "Infine, il maggior onere a titolo di interessi riconducibile ad un piano di ammortamento (alla francese) redatto applicando il regime finanziario della capitalizzazione composta, pone il problema del computo di tale "costo" nel calcolo del tasso effettivo globale annuo (TEG), da confrontare con il tasso soglia usurario (TSU) introdotto dalla L. n. 108 del 2008, ai fini della verifica dell'usurarietà dei tassi pattuiti. Difatti, ai sensi dell'art. 644, IV co., c.p., come sostituito dall'art. 2 della L. n. 108 del 1006 "per la determinazione del tasso di interesse usurario si tiene conto delle commissioni, remunerazioni a qualsiasi titolo e delle spese, escluse quelle

*per imposte e tasse, collegate alla erogazione del credito". Alla stregua di una corretta interpretazione di tale norma, tra i costi, le commissioni e le spese direttamente collegate all'erogazione del finanziamento, va tenuto conto anche del "costo" a carico del mutuatario, insito nell'utilizzo del regime di capitalizzazione composta nella redazione del piano di ammortamento (alla francese); costo pari al differenziale determinato dal minor importo della rata risultante dall'applicazione del regime di capitalizzazione semplice. Questo a prescindere dall'accettazione, esplicita o implicita, del regime di capitalizzazione composta degli interessi da parte del mutuatario, posto comunque a conoscenza dell'ammontare complessivo delle rate da pagare per il rimborso graduale del finanziamento. Anche in caso di accettazione, da parte del mutuatario, del regime finanziario di capitalizzazione composta, tale "costo implicito" va comunque computato ai fini del calcolo del tasso effettivo globale annuo (TEG), al pari di tutti gli altri costi, spese e remunerazioni collegate al finanziamento, incluso il vero e proprio effetto anatocistico di cui all'art. 1283 c.c. Al riguardo, tuttavia, va evidenziato come la formula matematica prevista dalle Istruzioni della B.I. per la determinazione del TEG tenga già conto del c.d. "costo implicito" insito nell'utilizzo del regime finanziario della capitalizzazione composta; ragione per cui non è possibile rideterminarlo e **applicarlo una seconda volta**, al fine di calcolare il TEG da confrontare con il tasso soglia antiusura (TSU).",*

- **Tribunale Civile di Milano** (num. 2014/marzo_2023): *"Infondata è rimasta altresì la contestazione in ordine all'applicazione di condizioni usurarie, considerato come il rilievo risulti essere stato articolato in forza di una consulenza di parte che dichiaratamente pretende di determinare il Tasso Effettivo Globale sulla base di formule differenti da quelle adottate dalla Banca d'Italia e in riferimento alle quali risulta rilevato il Tasso Effettivo Globale Medio e, di riflesso, il Tasso Soglia; tale rilievo evidenzia l'inattendibilità dei conteggi prospettati dalla difesa attorea, la quale ha sostanzialmente scorporato dall'ammontare dell'importo finanziato una somma a suo dire indebita, derivante dal sistema composto di calcolo delle rate, in tal modo, di fatto, **raddoppiando tale onere** e, così facendo, alterando irrimediabilmente la ricostruzione del TEG Leasing applicato nel contratto oggetto di causa",*

*nelle quali gli eminenti giudici, novelli emuli di **Pierre de Fermat** (1601-1665 - matematico, avvocato e magistrato francese, al quale si deve il famoso "**ultimo teorema di Fermat**" sui numeri naturali pitagorici), discettano giuridicamente su questioni prettamente algebriche, contrapponendosi a tesi dimostrate matematicamente. Nelle considerazioni precedenti risulta evidente la differenza tra l'**approccio scientifico** tipico della Matematica (nella quale a **teoremi (congetture dimostrate)** si contrappongono teoremi) e quello delle discipline non scientifiche (nelle quali a **congetture o affermazioni** si contrappongono altrettante congetture o affermazioni).*

Nota di merito: *va notato che l'esimio giudice del Tribunale di Roma, estensore delle due sentenze sopra richiamate, dopo aver premesso che "va tenuto conto anche del costo a carico del mutuatario, insito nell'utilizzo del regime di capitalizzazione composta nella redazione del piano di ammortamento (alla francese); costo pari al differenziale determinato dal minor importo della rata risultante dall'applicazione del regime di capitalizzazione semplice", aveva*

concluso, affermando l'ipotetica duplicazione della considerazione di tale costo implicito nell'equazione della Banca d'Italia. Lo stesso Magistrato in una precedente sentenza (di seguito riportata) aveva, al contrario, concluso affermando la giustezza dell'inclusione di tale onere implicito al fini del calcolo del TEG, senza fare alla congetturata duplicazione.

- **Tribunale Civile di Roma** (num. 2188/gennaio_2021): "Preso atto che il piano di ammortamento contrattuale segue il regime della capitalizzazione composta, il CTU ha incluso nel calcolo per la determinazione del TEG da confrontare con il TSU ai fini della verifica dell'usura, anche il maggiore costo (onere implicito) corrispondente alla differenza tra la rata contrattuale (calcolata in regime di capitalizzazione composta) e quella risultante dall'applicazione del regime finanziarie della capitalizzazione semplice. Ha incluso, quindi, nel calcolo del TEG il maggior costo sostenuto dal mutuatario a seguito del pagamento mensile di una rata (pari ad Euro 662,90, più 2 Euro di commissione bancaria, così pari ad Euro 664,90) maggiore rispetto a quella risultante dall'applicazione del regime finanziario della capitalizzazione semplice. A tal fine, il CTU ha effettuato un'indagine teorica che ha portato all'individuazione di tre piani di ammortamento, con altrettante rate possibili, calcolati con il regime finanziario della capitalizzazione semplice, cui ha poi applicato la formula dei tassi equivalenti per calcolare il TEG rispetto a ciascuno di essi. Così operando, includendo il costo implicito sulla rata di Euro 604,31, il TEG è risultato pari al 18.83%; includendo il costo implicito sulla rata di Euro 571,45, il TEG è risultato pari al 21,12 e, infine, includendo il costo implicito sulla rata pari a Euro 557.84, il TEG è risultato pari al 22,15. Pertanto, in tutte e tre le ipotesi di ricostruzione della rata, una volta considerato tra i costi del finanziamento anche il costo implicito calcolato sul differenziale scaturito dal minor importo della rata in applicazione del regime finanziario della capitalizzazione semplice, il TEG è risultato superiore non solo a quello del 15.09% indicato nella lettera di (oscurato) del 17.11.2015, ma anche al tasso soglia usurario (TSU) del 16,65% relativo la categoria "anticipi, sconti commerciali, crediti personali e altri finanziamenti effettuati dagli intermediari non bancari" superiori ad Euro 5.000.00, vigente all'epoca della sottoscrizione del contratto. Ne discende che, rispetto a tutte e tre le modalità di calcolo della rata in regime di capitalizzazione semplice, una volta incluso nel computo del TEG il suddetto costo implicito, in aggiunta a tutte le altre commissioni, remunerazioni e spese, gli interessi corrispettivi pattuiti nel contratto di finanziamento de quo risultano usurari. Soltanto nell'ipotesi ai cui non si includa il costo implicito posto a carico del mutuatario, ma tutti gli altri costi e spese contrattualmente pattuiti, il TEG ricalcolato dal CTU, pari al 15,28%, risulta inferiore al TSU del 16,65%. Parte convenuta ha contestato la correttezza del computo del TEG, oltre alle spese iniziali e periodiche previste contrattualmente, anche il costo implicito calcolato sul differenziale scaturito dal minor importo della rata risultante dall'applicazione del "presunto" regime finanziario della capitalizzazione semplice e la rata contrattuale calcolata in regime di capitalizzazione composta sostenendo che essa non trova conforto in alcun testo finanziario. Il Tribunale, al contrario, alla stregua di una corretta interpretazione della norma di cui all'art. 644, IV co., c.p. secondo la quale "per la determinazione del tasso di interesse usurario si tiene conto delle commissioni, remunerazioni a qualsiasi titolo e delle spese, escluse quelle per imposte e tasse, collegate alla erogazione del credito, ritiene che

tra i costi, le commissioni e le spese direttamente collegate all'erogazione del finanziamento **vada incluso anche il costo occulto** a carico del mutuatario, insito nell'utilizzo del regime di capitalizzazione composta nella redazione del piano di ammortamento (alla francese); costo pari al **differenziale** scaturito dal minor importo della rata risultante dall'**applicazione del regime di capitalizzazione semplice**. Ciò a **prescindere dall'accettazione**, esplicita o implicita, del **regime di capitalizzazione composta** degli interessi da parte del mutuatario, posto comunque a conoscenza dell'ammontare complessivo delle rate da pagare per il rimborso graduale del finanziamento. Difatti, anche in caso di accettazione da parte del mutuatario del regime finanziario di capitalizzazione composta, il predetto **costo implicito andrebbe comunque computato ai fini del calcolo del tasso effettivo globale annuo (TEG)**, al pari di tutti gli altri costi, spese e remunerazioni collegate al finanziamento, incluso il vero e proprio effetto anatocistico di cui all'art. 1283 c.c. Pertanto, ritenuta la correttezza sia del metodo utilizzato che dei calcoli elaborati dal CTU, va accertata l'usurarietà del tasso di interesse effettivo (TEG) concordato nel contratto di finanziamento in contestazione. Conseguentemente, va dichiarata, ai sensi dell'art. 1815, co. 2. c.c., la nullità della clausola di pattuizione degli interessi corrispettivi e la gratuità del finanziamento, non essendo dovuto alcun interesse”.

Il raffronto tra la sentenza 2021 e le due sentenze 2022, mostra il costante convincimento da parte dell'organo giudicante della giustezza della considerazione della presenza dell'onere implicito nella fattispecie considerata di operazione finanziaria, salvo a evidenziare la presenza di conclusioni contrastanti, a seguito di un ripensamento intervenuto nel frattempo. È evidente, alla luce delle considerazioni algebriche evidenziate nel corrente scritto, come tale ripensamento non risulti condivisibile da parte degli autori del presente articolo, per i quali, in base ai principi della Matematica Finanziaria, non sussiste alcuna duplicazione dell'onere.

- *l'equazione (2) presenta come unica soluzione il TAE dell'operazione finanziaria, tenendo conto delle spese: il tasso TAE(spese) risulta lievemente maggiore del TAE, in quanto l'ascissa del punto di intersezione $VAN \# VAN(TAE_spese)$ risulta a destra del TAE, a causa della decrescenza della funzione VAN;*
- *l'equazione (3) presenta come unica soluzione il TEG dell'operazione finanziaria, tenendo conto delle spese e dell'onere implicito: il tasso ottenuto risulta consistentemente maggiore del TAE, in quanto l'ascissa del punto di intersezione $VAN \# VAN(TEG)$ risulta a destra del TAE, a causa della decrescenza della funzione VAN; il fatto che il TEG risulti maggiore del TSU configura una situazione di usura “ab origine”.*

Considerazione geometrico-analitica

Come verificare il superamento del TSU, senza la preventiva determinazione del TEG

Dall'esame del grafico, si può notare che il caso all'esame presenta una situazione nella quale si realizza il superamento del TSU da parte del TEG, in quanto al TEG corrisponde un'ascissa maggiore rispetto all'ascissa corrispondente al TSU. È evidente che il confronto richiede, oltre alla conoscenza del TSU, anche il calcolo del TEG.

Domanda: È possibile, in casi come quello all'esame, verificare il superamento del TSU, senza la preventiva determinazione del TEG?

Risposta: Si.

Infatti per verificare se il TEG risulta maggiore del TSU, è sufficiente accertare se la curva (decescente al variare del tasso d'interesse) del VAN presenta, in corrispondenza dell'ascissa TSU, un'ordinata maggiore a VAN(TEG). Poiché tale ordinata non è altro che il VAN, valutato in base al TSU, è sufficiente comparare tale valore con l'importo del finanziamento depurato delle spese iniziali e dell'onere implicito: se **VAN(TSU)** risulta maggiore di **VAN(TEG)** la situazione è usuraria, se **VAN(TSU)** risulta minore/uguale di **VAN(TEG)** la situazione non è usuraria.

Dal punto di vista computazionale il calcolo necessario per l'accertamento dell'usura risulta di molto semplificato: il procedimento non richiede infatti la ricerca del **tasso interno di costo** di un'operazione finanziaria, ma semplicemente il calcolo del **valore attuale di una rendita**, ossia la valutazione del VAN "delle rate" in base al TSU e quindi la sua comparazione con il VAN "dei prestiti". Nel caso specifico, indicando con $i_{1/m}^{TSU}$ il **Tasso** (periodale effettivo) **Soglia d'Usura (T(PE)SU)** equivalente al **Tasso** (annuo effettivo) **Soglia d'Usura (T(AE)SU)** del **12,05%**

$$i_{1/m}^{TSU} = (1 + i^{TSU})^{1/m} - 1 = 1,1205^{1/12} - 1 = 0,952634\%$$

il **valore attuale delle rate, spese e riscatto finale** calcolato in base a tale tasso $i_{1/m}^{TSU}$ risulta

$$\begin{aligned} VAN_b^2(i_{1/m}^{TSU}) &= (R + S) \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{TSU}} + (G_n + S) \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{TSU}} = \\ &= 29.590,00 \cdot \underbrace{a_{\overline{203}|0,952634\%}}_{89,654530} + 426.320,00 \cdot \underbrace{v_{\overline{204}|0,952634\%}}_{0,144543} \\ &= 2.652.877,65 + 61.621,76 = 2.714.499,41 \end{aligned}$$

poiché **VAN(TSU) = 2.714.499,41** risulta maggiore di **VAN(TEG) = 2.405.088,61**, l'operazione finanziaria risulta in usura.

Dalle considerazioni precedenti è possibile anche definire il valore dell'**Onere implicito soglia** \widehat{O}_0 , che rappresenta l'importo in corrispondenza del quale il TEG coincide con il TSU

$$\begin{aligned} D_0 - W_0 - S_0 - \widehat{O}_0 &= (R + S) \cdot a_{\overline{n-1}|i_{1/m}^{TSU}} + (G_n + S) \cdot v_{\overline{n}|i_{1/m}^{TSU}} \\ 3.351.000,00 - \widehat{O}_0 &= 29.590,00 \cdot \underbrace{a_{\overline{203}|0,952634\%}}_{89,654530} + 426.320,00 \cdot \underbrace{v_{\overline{204}|0,952634\%}}_{0,144543} \\ \widehat{O}_0 &= 3.351.000,00 - 2.652.877,65 - 61.621,76 = 636.500,59 \end{aligned}$$

Bibliografia “tecnica” di riferimento

- [AABO23b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Anatocismo nei processi di ammortamento - Il rapporto scientifico dell’AMASES 2022/01 - Ulteriori considerazioni critiche di tipo matematico”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 66 febbraio - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO23a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Anatocismo nei processi di ammortamento - Il rapporto scientifico dell’AMASES 2022/01 - Considerazioni critiche di tipo matematico e giuridico”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 65 gennaio - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22n] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Il grado di capitalizzazione di un’operazione finanziaria e la quantificazione dell’onere implicito relativo al differenziale tra regimi finanziari nell’ammortamento di un mutuo “alla francese” - Sulla non duplicazione di tale onere implicito nel calcolo del TEG”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 64 dicembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22m] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “L’ammortamento di un mutuo “alla francese” a due tassi”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 63 novembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22l] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “L’anatocismo matematico dipende dal regime finanziario e non dalla metodologia di ammortamento - Dimostrazione di come l’ammortamento “all’italiana” nel regime finanziario della capitalizzazione composta sia affetto da anatocismo al pari di quello “alla francese”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 62 ottobre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22i] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “I tassi d’interesse di computo: complementi e generalizzazioni”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 61 settembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22h] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “I tassi di interesse di computo: definizioni e modalità di calcolo”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 60 agosto - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22g] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Sulla scindibilità parametrica delle leggi finanziarie. La “dotta disputa” tra Filadelfo Insolera e Francesco Paolo Cantelli”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 59 luglio - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22f] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Sulla scindibilità parametrica delle leggi finanziarie. Approfondimenti”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 58 giugno - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Sulla scindibilità parametrica delle leggi finanziarie”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 57 maggio - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Considerazioni sulle diverse tipologie di tassi di interesse. Come ricavare il TAN dal TAEG senza conoscere la rata di ammortamento”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 56 aprile - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “Considerazioni sui regimi finanziari delle capitalizzazioni polinomiali con particolare riguardo alla capitalizzazione semplice e composta”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno VI, num. 55 marzo - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO22b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - “La sentenza 8/2022 del Tribunale Civile di Cremona. Considerazioni tecnico-matematiche sulla stesura dei piani di ammortamento e sulla

quantificazione dell'onere implicito tra regimi finanziari”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno VI, num. 54 febbraio - ISSN 2611-0083 E-246934

[AABO22a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“La Prestito vitalizio ipotecario. Considerazioni tecnico-scientifiche - Complementi”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno VI, num. 53 gennaio - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21n] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Prestito vitalizio ipotecario. Considerazioni tecnico-scientifiche”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 52 dicembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21m] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“La valutazione del fondo aziendale TFR (Trattamento di Fine Rapporto) secondo il Principio contabile internazionale Ias19. Parte Seconda”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 51 novembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21l] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“La valutazione del fondo aziendale TFR (Trattamento di Fine Rapporto) secondo il Principio contabile internazionale Ias19. Parte Prima”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 50 ottobre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21i] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Ammortamento di mutui “alla francese”: quando si sostiene a sproposito che la matematica viene invocata a sproposito”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 49 settembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21h] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sull'unicità del contratto di mutuo con clausola del contratto edilizio: il caso dei mutui della BHW Bausparkasse AG. Un'applicazione dei principi e dei metodi dell'algebra lineare. La stesura del piano di ammortamento in capitalizzazione semplice”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 48 agosto - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21g] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Considerazioni sull'onere implicito relativo al differenziale di regime finanziario nelle operazioni di prestito con rimborso rateale. Analisi e confronti tra metodologie - Matrici delle valutazioni”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 47 luglio - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21f] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Considerazioni sull'onere implicito relativo al differenziale di regime finanziario nelle operazioni di prestito con rimborso rateale. Analisi e confronti tra metodologie di valutazione - Complementi”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 46 giugno - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Considerazioni sull'onere implicito relativo al differenziale di regime finanziario nelle operazioni di prestito con rimborso rateale. Analisi e confronti tra metodologie di valutazione”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 45 maggio - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sulla misura del livello di anatocismo presente nelle operazioni finanziarie regolate dal regime della capitalizzazione composta. Versione estesa - Ammortamenti 2”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 44 aprile - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sull'unicità del contratto di mutuo con clausola del contratto edilizio: il caso dei mutui della BHW Bausparkasse AG. Un'applicazione dei principi e dei metodi dell'algebra lineare”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 43 marzo - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO21b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sulla misura del livello di anatocismo presente nelle operazioni finanziarie regolate dal regime della capitalizzazione composta. Versione estesa - Ammortamenti”, Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno V, num. 42 febbraio - ISSN 2611-0083 E-246934*

- [AABO21a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sulla misura del livello di anatocismo presente nelle operazioni finanziarie regolate dal regime della capitalizzazione composta. Versione estesa.”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno V, num. 41 gennaio - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20n] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Sulla misura del livello di anatocismo presente nelle operazioni finanziarie regolate dal regime della capitalizzazione composta”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 40 dicembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20m] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“L’operazione di leasing traslativo e il regime finanziario della capitalizzazione semplice – La quantificazione dell’onere occulto”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 39 novembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20l] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“L’operazione di leasing immobiliare in capitalizzazione semplice La sentenza 4102 del 16 giugno 2020 del Tribunale Civile di Napoli”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 38 ottobre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20i] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Ammortamento in capitalizzazione semplice di mutui “alla francese”: analisi e confronto dei modelli proposti o in uso. Allegato: Scritture in partita doppia”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 36, agosto - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20h] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Ammortamento in capitalizzazione semplice di mutui “alla francese”: analisi e confronto dei modelli proposti o in uso”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 35, luglio, pp. 44-66, - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20g] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Ammortamento “alla francese” di mutui in capitalizzazione semplice. La scelta dell’epoca di equivalenza finanziaria: finale oppure iniziale?”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 34, giugno, pp.70-79, - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20f] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Gli articoli 1283 e 821 del codice civile: l’interpretazione logica secondo i principi dell’algebra di Boole”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 34, giugno, pp. 64-69, - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Capitalizzazione composta # Capitalizzazione semplice. Come dedurre un piano di ammortamento in capitalizzazione semplice (con epoca di equivalenza finanziaria corrispondente al tempo finale dell’operazione) (CS.f) dal corrispondente piano predisposto in capitalizzazione composta (CC). Complementi”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 33, maggio, pp. 55-75, - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Capitalizzazione composta # Capitalizzazione semplice. Come dedurre un piano di ammortamento in capitalizzazione semplice (con epoca di equivalenza finanziaria corrispondente al tempo finale dell’operazione) (CS.f) dal corrispondente piano predisposto in capitalizzazione composta (CC)”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 32, aprile pp.50-70, - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - *“Ammortamento progressivo di un prestito indiviso. Definizione generale e tipologie tradizionali – Parte I: Complementi”*, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno IV, num. 31, marzo - ISSN 2611-0083 E-246934

- [AABO20b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Ammortamento progressivo di un prestito indiviso. Definizione generale e tipologie tradizionali", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, Edizione ORO, num. 4, febbraio* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO20a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Elementi di base per le valutazioni finanziarie. Parte Prima - Tipologie di tassi di interesse: TAN, TPE e TAE", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno IV, num. 29, gennaio* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19m] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Prestito vitalizio ipotecario. Anticipazione di considerazioni tecnico-scientifiche", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 28, dicembre* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19l] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. - "Le "strane" recenti sentenze della Sezione XVII Civile del Tribunale Ordinario di Roma - Osservazioni tecnico-matematiche sulla stesura di piani di ammortamento "alla francese" di un mutuo". *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 27, novembre* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19i] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. - "Complementi al modello matematico "completo" del calcolo del TEG per la verifica di usura in mutui e finanziamenti con considerazione di: oneri iniziali e oneri periodici, tasso di mora, penale di estinzione anticipata e differenziale tra regimi finanziari", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 26, ottobre* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19h] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. - "Il modello matematico "completo" del calcolo del TEG per la verifica di usura in mutui e finanziamenti a rimborso rateale", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 25, settembre* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19g] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Usura nei mutui: metodo di calcolo del TEG con considerazione del tasso di mora. Analisi dei metodi presenti nelle sentenze", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 24, agosto* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19f] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. - "Commento tecnico-matematico alla sentenza del Tribunale di Torino n.605 del 30 maggio 2019 relativa alla negazione della presenza dell'anatocismo nell'ammortamento "alla francese" di un mutuo nel regime finanziario della capitalizzazione composta." *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 23, luglio* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. - "Problematiche relative alla considerazione del tasso di mora nel calcolo del TAEG nell'ammortamento di un mutuo "alla francese". Complementi." *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 22, giugno* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Anatocismo e capitalizzazione. Considerazioni su alcuni aspetti tecnico scientifici", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 21, maggio* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "La penale per estinzione anticipata di un mutuo: la sua considerazione nel tasso da confrontare con il TSU", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 20, aprile* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "I piani di ammortamento di un mutuo. Coerenze e incoerenze.", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 19, marzo* - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AABO19a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. - "Giusta nota per dimostrare, "si spera definitivamente", la presenza di anatocismo nell'ammortamento di mutui "alla francese" stilati secondo le leggi del regime finanziario della capitalizzazione composta", *Le controversie Bancarie,*

Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno III, num. 18, febbraio - ISSN 2611-0083 E-246934

[AABO18e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. – “Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Complementi 3”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 16, dicembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO18d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. – “Nel piano di ammortamento “alla francese” stilato in base al regime finanziario della capitalizzazione composta (cc) le quote interesse sono calcolate secondo il regime della capitalizzazione semplice (cs) oppure della capitalizzazione composta (cc)? Una risposta scientifica al problema mediante una verifica numerica e una dimostrazione algebrica”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 15, novembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO18c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. – “Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Complementi 2”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 13, settembre - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO18b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. – “Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Complementi”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 12, agosto - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AABO18a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri F. – “Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento di un mutuo “alla francese” in capitalizzazione semplice”, *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 10, giugno, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB18c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Considerazioni sull’ammortamento nelle operazioni di leasing”. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 7, marzo, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB18b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Problematiche relative alla considerazione del tasso di mora nel calcolo del TEG nell’ammortamento di un mutuo “alla francese”. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 7, marzo, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB18a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Ammortamento di mutui “alla francese” in capitalizzazione semplice con alcuni pagamenti già effettuati in capitalizzazione composta”. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno II, num. 5, gennaio, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB17e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – *Le “strane” formule della Banca d’Italia in tema di usura. Complementi. Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno I, num. 4, dicembre, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB17d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Lo “stato dell’arte”, sia accademico che professionale, sulla presenza dell’anatocismo nell’ammortamento di mutui “alla francese” e relativa stesura del piano in capitalizzazione semplice”. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno I, num. 3, novembre, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB17c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Analisi tecnico-finanziaria di alcune sentenze relative alla presenza/assenza del fenomeno anatocistico nei mutui “alla francese””. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno I, num. 2, ottobre, - ISSN 2611-0083 E-246934*

[AAB17b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Le “strane” formule della Banca d’Italia in tema di usura”. *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno I, num. 1, settembre, - ISSN 2611-0083*

- [AAB17a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “L’anatocismo nell’ammortamento di un mutuo “alla francese”: confronto con un conto corrente.” *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici*, anno I, num. 1, settembre - ISSN 2611-0083 E-246934
- [AAB16e] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – *Anatocismo e ammortamento di mutui alla francese. Manuale per le professioni di Magistrato, Dottore Commercialista ed Avvocato. CreateSpace Independent Publishing Platform; 1 edition, ISBN-13:978-1539463948 e ISBN-10: 1533450226*
- [AAB16d] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “La reintroduzione dell’anatocismo nella modifica all’art. 120/2 del T.U.B”, *Dirigenza Bancaria Finance-Management-Innovation* n. 179, ISBN 1828-7247
- [AAB16c] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “Ammortamento di mutui alla francese in capitalizzazione semplice”, *Dirigenza Bancaria Finance-Management-Innovation* n. 179, ISBN 1828-7247
- [AAB16b] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – *Anatocismo e ammortamento di mutui alla francese in capitalizzazione semplice: modello e applicazioni, CreateSpace Independent Publishing Platform; 1 edition - ISBN-13:978-1533450227 e ISBN-10: 1533450226*
- [AAB16a] Annibali A., Annibali, A., Barracchini, C. – “L’Anatocismo nei mutui tra diritto civile e Matematica Finanziaria”, *Dirigenza Bancaria Finance-Management-Innovation* n. 178,- ISBN 1828-7247
- [Anni93] Annibali A.– *Strumenti matematici per un corso di informatica – Ediz. Luiss Press 1993*
- [Aret14] Aretusi G. – *Mutui e anatocismo. Aspetti matematici e tecnici – Edizioni LuLu.com*
- [AtMa69] Atiyah M. F. and MacDonald I. G – *Introduction to commutative algebra, AddisonWesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.*
- [BaPi22] Basso A., Pianca P. - *Introduzione alla matematica finanziaria, CEDAM Scienze Economiche e aziendali, Terza Edizione - ISBN 9788813363307*
- [Benn01] Benninga S. – *Modelli Finanziari. La finanza con Excel a cura di Torricelli C. – McGraw Hill*
- [Bonf38] Bonferroni C. E. – *Fondamenti di matematica attuariale – Edizioni Gili*
- [BMORT93] Bortot P., Magnani U., Olivieri G., Rossi F.A., Torregiani M. – *Matematica Finanziaria II ed. con esercizi – Edizioni Gili*
- [CacR72] Cacciafesta R. – “Sul concetto di scindibilità e sul processo di capitalizzazione semplice” – *Studi in onore di Fernando Giaccardi – Torino*
- [CacR68] Cacciafesta R. – *Lezioni di Matematica Finanziaria – Liguori Editore - Napoli*
- [CacF90] Cacciafesta F. – “Una luce nuova su una vecchia storia: la scindibilità di Cantelli-Insolera e la struttura a termine dei tassi di interesse” – *Rivista Amases*
- [Cali98] Caliri M. – *Appunti di Matematica Finanziaria, Giappichelli Editore, Torino*
- [Cant46] Cantelli F. P. – *Riassunto delle lezioni di matematica finanziaria – Ediz. Pioda, 1946.*
- [Cant47] Cantelli F. P. – *Riassunto delle lezioni di matematica attuariale – Ediz. Pioda, 1947.*
- [Cant14] Cantelli F. P. – “Genesi e costruzione delle tavole di mutualità” – *Bollettino Notizie Credito e Previdenza, 1914.*
- [Cast75] Castagnoli E. - “Sul confronto fra i Criteri del Risultato Economico Attualizzato e del Tasso di Rendimento” *Studi e Ricerche, Facoltà di Economia e Commercio dell’Università degli Studi di Parma, vol. 2, pp. 127-133.*
- [CDFM05] Castellani G., De Felice M., Moriconi F. – *Manuale di Finanza. Tassi d’interesse. Mutui e obbligazioni, - Edizioni Il Mulino*
- [DeFi55] De Finetti B. – *Lezioni di matematica finanziaria – Ed. Ricerche – Roma*

- [DeGa19] D'Ecclesia R.L., Gardini L. – *Appunti di Matematica Finanziaria VIII edizione*, Giappichelli Torino
- [Dell31] Dell'Agnola C. A. – “Intorno alle leggi scindibili di capitalizzazione”, G.I.I.A.
- [DVeP18] De Vecchi P., – “Il riscatto finale nel leasing traslativo: una dicotomia tra diritto e applicazione matematica che genera anatocismo”, AssoCTU.
- [Dila84] Di Lazzaro M. – *Lezioni di Matematica finanziaria*, - CISU- Roma
- [FeOl15] Fersini P., Olivieri G. – “Sull'anatocismo nell'ammortamento francese” –*Banche e Banchieri – Rivista dell'Associazione Nazionale Banche Private - n.2/15 - ISSN 0390-1378*
- [Fior19] Fiorucci F. – “Anatocismo, usura e TAEG/ISC nei mutui bancari”, *Altalex editore, consultabile online su Lamiabiblioteca.com - ISBN 978 889820932*
- [GJRV17] Gismondi F., Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E. – *Matematica Finanziaria*, Giappichelli Editore
- [Guer86] Guerraggio A. – “Le equazioni funzionali nei fondamenti della matematica finanziaria” – *Rivista Amases*
- [Kell13] Kellison S. G. – *The Theory of interest Second edition - Maggioli Editore Apogeo Education*
- [Inso49] Insolera F. – *Teorica della capitalizzazione – Edizioni Scientifiche Einaudi*
- [Inso50] Insolera F. – *Teorica dell'ammortamento – Edizioni Scientifiche Einaudi*
- [Inso51] Insolera F. – *Teorica della sopravvivenza – Edizioni Scientifiche Einaudi*
- [Inso37] Insolera F. – *Corso di matematica finanziaria – Edizioni Bona*
- [Inzi14] Inzitari B. - *Prefazione del Libro scritto da Luigi Spagnolo dal titolo: "L'Anatocismo Mascherato" edizione Esperidi*
- [JMVdP12] Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E. – *Finanza Matematica - Vol 1 Giappichelli Editore*
- [Lazz80] Lazzar F. - “Condizioni sufficienti per l'Unicità del Tasso Interno di Rendimento” *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, lug.-dic., vol.43, pp.81-104.*
- [Levi50] Levi E. - “Sul Tasso di Interesse come Indice”, *Giornale di Matematica Finanziaria, Serie III vol. 8 n.3*
- [Levi59] Levi E. - *Corso di Matematica Finanziaria La Goliardica, Milano, terza Edizione*
- [Levi64] Levi E. - *Corso di Matematica Finanziaria e attuariale, Milano, Giuffrè Editore*
- [Lise79] Lisei G. – “Su un'equazione funzionale collegata alla scindibilità delle leggi finanziarie” - G.I.I.A.
- [Lise88] Lisei G. – “On the functional equation $\phi(x, y, z) = \phi(\phi(x, y, t), t, z)$ ” – *Rivista Amases*
- [LuPe97] Luciano E., Peccati L. – *Matematica per la gestione finanziaria. Editori Riuniti IV edizione*
- [Lund13b] Luenberger D. G. – *Introduzione alla Matematica finanziaria – Maggioli Editore Apogeo Education*
- [Lund13a] Luenberger D. G. – *Finanza e investimenti. Fondamenti matematici – Maggioli Editore Apogeo Education*
- [Manc88] Manca P. - “Operazioni finanziarie di Soper e operazioni di puro investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano”, *Atti del XII^o Convegno A.M.A.S.E.S., Palermo*
- [Manc69] Manca P. – *Equazioni funzionali e leggi di interesse finanziario – G.I.I.A.*
- [Mori94] Moriconi F. – *Matematica Finanziaria – Edizioni Il Mulino*
- [Mula93] Mulazzani M. – “Aspetti dinamici di leggi finanziarie scindibili” – *Rivista Amases*

- [MV2018] Marcelli R., Valente A. - "Usura e tasso di mora. Sancita la verifica alla pattuizione: riflessi operativi", *Il CASO.it*
- [Marc19] Marcelli R. - "Ammortamento alla francese e all'italiana: le conclusioni della giurisprudenza risultano confutate dalla matematica" - *Il CASO.it*
- [MaAr18] Mari C., Aretusi G. - "Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare" *Il Risparmio, Rivista trimestrale dell'ACRI Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio SpA anno LXVI, n.1 gennaio - marzo*
- [MaAr19] Mari C., Aretusi G. - "Sull'ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice: alcune considerazioni concettuali e metodologiche" *Il Risparmio, Rivista trimestrale dell'ACRI Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio SpA anno LXVII, n.1 gennaio - marzo*
- [Nors70] Norstrom C. J. - "Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment: a comment" *The Economic Journal Dec., vol.80, pp.983-984.*
- [Nors72] Norstrom C. J. - "A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return", *Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 7, pp. 1835-1939*
- [OttM81] Ottaviani M. - *Leggi finanziarie scindibili - G.I.I.A.*
- [OttG62] Ottaviani G. - *Lezioni di matematica finanziaria - Ed. Veschi - Roma*
- [Prov23] Provenzano D. - "Il rapporto scientifico dell'AMASES 2022/01 - Le ragioni del contrasto con il Diritto - Quando la matematica finanziaria finisce con rinnegare sé stessa", *Le controversie Bancarie, Attualità di Giurisprudenza, Dottrina e casi pratici, anno VI, num. 66 febbraio - - ISSN 2611-0083 E-246934*
- [Rite22] Ritelli D. - *Matematica Finanziaria, Società Editrice Esculapio ISBN 978-88-9385-241-8*
- [Rizz18] Rizzo N. - "Interessi moratori usurari nella teoria delle obbligazioni pecuniarie", *Banca Borsa Titoli di Credito, anno LXXX, Fasc. 3 - - ISSN 0390-9522 Milano Giuffrè Editore*
- [RuFa17] Rutigliano M., Faccincani L. - "Brevi note per riconoscere, 'si spera definitivamente' l'assenza di anatocismo nel mutuo con piano di ammortamento alla francese" - *Banche e Banchieri - Rivista dell'Associazione Nazionale Banche Private - n.3 - ISSN 0390-1378*
- [Sang15] Sangiovanni V. - "Interessi corrispettivi e moratori tasso-soglia usura e clausola penale. Commento". *Rivista: Danno e responsabilità n.5 pp 522-532*
- [Sibi58] Sibirani F. - *Lezioni di Matematica generale e finanziaria - Vol. II Ristampa seconda edizione Ed. CEDAM Padova*
- [Sope59] Soper C. S. - "The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note", *The Economic Journal Marzo vol. 69, pp. 174-177.*
- [Spag14] Spagnolo L. - *L'anatocismo mascherato - Ed. Esperidi*
- [StTZ17] Stefani S., Torriero A., Zambruno G. - *Elementi di matematica finanziaria e cenni di programmazione lineare. quinta ed. - Giappichelli Editore, Torino*
- [TRM65] Teichroew D., Robichek A. A., Montalbano M. - "Mathematical Analysis of Rates of Return Under Certainty" *Management Science, vol. 11, pp. 395-403.*
- [Trov90b] Trovato M. - *Matematica finanziaria - Ed. Etas Libri - ISBN 9-788845-304156*
- [Trov90a] Trovato M. - *Matematica finanziaria. Operazioni finanziarie semplici e complesse, Ammortamenti, piani di risparmio, valutazioni, leasing, indicizzazione, selezione di piani di investimenti - Ed. Etas Libri*
- [Varo83] Varoli G. - *Matematica Finanziaria. Teoria del credito teoria delle assicurazioni sulla vita. Complementi. II ed Patròn Editore, Bologna*

[VoSi81] Volpe Di Prignano E., Sica C. - *“Problems of Valuation in Financial Substitutive Operations and in Mixed Projects” in Mathematical Programming and its Economic Application, a cura di Castellani G. e Mazzoleni P., Franco Angeli, Milano*

[VolP07] Volpe di Prignano E. - *Lezioni di matematica finanziaria classica – Ed. CISU – Roma*

[VolP09b] Volpe di Prignano E. - *Lezioni di matematica finanziaria avanzata – Ed. CISU – Roma ISBN 9-788879-754439*

[VolP09a] Volpe Di Prignano E. - *“Lectio Magistralis: usi & abusi del TRM”*

[VolP00] Volpe di Prignano E. - *Complementi di Matematica Finanziaria – Edizioni KAPPA – Roma*

[VolP85] Volpe di Prignano E. - *Manuale di Matematica Finanziaria – ESI – Napoli*

[Warh16] Warhe D. - *Anatocismo nei mutui. Le formule segrete – Ed. D. Warhe DRM Watermark – ISBN 9-781530-622931*